

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ CLUJ - 20.02.2026**

Barem clasa a V-a

Din oficiu.....10p

Subiectul 1. (25 puncte)

- a) Aflați ultima cifră a numărului

$$A = 11^{12} + 12^{13} + 13^{14} + 14^{15} + 15^{16} + 16^{17} + 17^{18} + 18^{19} + 19^{20}$$

- b) Aflați cel mai mic număr natural cu proprietatea că suma cifrelor sale este egală cu 2026.

Soluție:

- a) $U(A) = U(1 + 2 + 9 + 4 + 5 + 6 + 9 + 2 + 1) = 9$10p

- b) Pentru a determina cel mai mic număr natural cu această proprietate trebuie să avem cât mai multe cifre de 9.....5p

deoarece $2026 = 9 \cdot 225 + 1$ rezultă că numărul trebuie să aibă 225 de cifre egale cu 9 și una egală cu 15p

Numărul căutat este: $1 \underbrace{999 \dots 999}_{\text{de 225 ori}}$ 5p

Subiectul 2. (25 puncte)

Fie numerele $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2026$ și $b = (6^6)^{37} \cdot 4^{111}$.

- a) Arătați că numărul b este pătrat perfect.

- b) Dacă $N = a + 2026$, determinați restul împărțirii lui N la 5.

- c) Arătați că numărul $M = a + b + 2^{2026}$ nu este pătrat perfect.

Soluție:

- a) $111 = 3 \cdot 37 \Rightarrow b = (6^6)^{37} \cdot 4^{111} = [(6^2)^3]^{37} \cdot 4^{111} = 36^{111} \cdot 4^{111} = 9^{111}$ 5p

$$\Rightarrow b = (3^{111})^2 \text{ p.p.} \dots\dots\dots 2p$$

- b) $N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2026 + 2026 = 5 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2026) + 5 \cdot 405 + 1$ 3p

$$N = 5 \cdot \underbrace{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2026 + 405)}_c + \underbrace{1}_r \dots\dots\dots 2p$$

$$\Rightarrow \text{restul împărțirii lui } N \text{ la } 5 \text{ este } 1 \dots\dots\dots 1p$$

- c) $u(a) = u(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2026) = 0$3p

$$u(b) = u(9^{111}) = 9 \dots\dots\dots 3p$$

$$u(2^{2026}) = 4 \dots\dots\dots 3p$$

$$\Rightarrow u(M) = 3 \Rightarrow M \text{ nu este pătrat perfect} \dots\dots\dots 3p$$

Subiectul 3. (20 puncte)

Trei bluze identice, două fulare identice și o vestă costă 304 lei. Calculând o treime din prețul unei bluze, jumătate din prețul unui fular și o șesime din prețul vestei se obțin rezultate egale. Ce preț are fiecare obiect?

Soluție:

Reprezentăm cu un segment o treime din prețul bluzei, jumătate din prețul fularului și o șesime din prețul vestei4p
Prețul bluzei înseamnă 3 segmente, prețul fularului 2 segmente și prețul vestei 6 segmente4p
Prețul a 3 bluze înseamnă 9 segmente, iar prețul a 2 fulare 4 segmente4p
Prețul total înseamnă 19 segmente.....2p
Un segment este echivalent cu $304:19=16$ lei2p
O bluză are prețul $3 \cdot 16 = 48$ lei.....2p
Un fular are prețul $2 \cdot 16 = 32$ lei1p
Vesta are prețul $6 \cdot 16 = 96$ lei.....1p

Subiectul 4. (20 puncte)

Se consideră șirul 1, 3, 4, 7, 1, 8, 9,..., unde orice termen, începând cu al treilea, este egal cu ultima cifră a sumei ultimilor doi termeni precedenți. Notăm S_n suma primilor n termeni ai șirului.

- Arătați că S_{25} este pătrat perfect.
- Determinați n astfel încât $S_n = 2026$.

Soluție:

a) Șirul conține 1, 3, 4, 7, 1, 8, 9, 7, 6, 3, 9, 2, 1, 3, 4,.....3p
Observăm că termenii șirului se repetă după termenul al 12-lea.3p
 $25 = 12 \cdot 2 + 1$, deci vom avea două grupe complete de câte 12 termeni și încă un termen.....3p
 $S_{25} = 2 \cdot (1 + 3 + 4 + 7 + 1 + 8 + 9 + 7 + 6 + 3 + 9 + 2) + 1 = 121 = 11^2$ care este p.p.3p
b) $2026 = 60 \cdot 33 + 46$, deci avem 33 de perioade complete, adică $33 \cdot 12 = 396$ termeni.....3p
 $46 = 1 + 3 + 4 + 7 + 1 + 8 + 9 + 7 + 6$, adică 9 termeni.....3p
Vom avea $396 + 9 = 405$ termeni.....2p